GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS:

BREVE HISTÓRICO E ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FILOSÓFICAS

Carlos Jeremias Klein*

Resumo

Este trabalho, após um histórico sobre o V Postulado de Euclides e o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas de Lobatchevski e o Riemann no século XIX, traz alguns comentários sobre questões filosóficas suscitadas a partir dessas geometrias.

Introdução

Deve-se a Euclides (330-227 a.c., aproximadamente), com seus "Elementos", uma importante sistematização da Geometria. Sobre essa monumental composição, disse Einstein: "... se alguém, no despertar de sua inteligência, não foi capaz de se entusiasmar com uma arquitetura assim, então nunca poderá realmente se iniciar na pesquisa teórica".[1]

Euclides constrói sua geometria partindo de "definições", "noções comuns" e "postulados". Enquanto os postulados eram afirmações que se pediam que fossem aceitas (sem demonstração), as noções comuns eram afirmações auto-evidentes, por exemplo: "Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si".[2]. Atualmente, em lugar de "noções comuns" e "postulados", prefere-se a denominação "axioma" para as proposições não demonstradas (ou não demonstráveis) que fundamentam um sistema de conhecimentos.

Nos "Elementos", Livro Primeiro, encontram-se vinte e três definições, nove noções comuns e cinco postulados.A partir destas definições e afirmações iniciais, Euclides passa a demonstrar, por dedução lógica, outras proposições, ditas teoremas. Este sistema inaugurado por Euclides durou séculos. Uma reformulação axiomática rigorosa da geometria aparece com David Hilbert (1862- 1943), com o importante trabalho " Gundlagen der Geometrie" (Fundamentos da Geometria) em 1899.

Entende-se por "Geometria não-euclidiana" qualquer geometria na qual o V Postulado de Euclides, o axioma de paralelismo, é negado. As questões suscitadas por essa questão serão agora expostas.

1. O V Postulado de Euclides e o surgimento das geometrias não- euclidianas

"Pede-se que se uma reta, cortando as outras duas, forma os ângulos internos a uma mesma parte, menores de dois retos, as duas retas prolongadas ao infinito se encontrarão na parte em que estão os dois ângulos menores que dois retos"[3]. Eis uma tradução praticamente literal do famoso V Postulado de Euclides. Para uma visualização, veja-se a figura 1.

---

* Prof. Departo de Ciências Exatas/CESULON

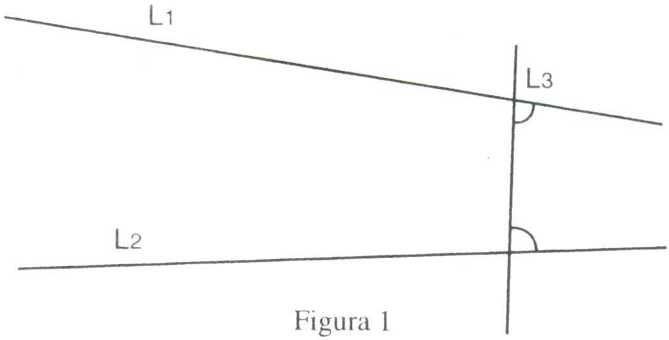

Figura 1

O V Postulado de Euclides é mais conhecido pela formulação dada pelo inglês John Playfair (1748-1819), a saber: Axioma de paralelismo: Sejam dados, em um plano, uma reta L e um ponto P que não está em L. Então existe uma e só uma paralela a L passando por P" [4].(figura 2)

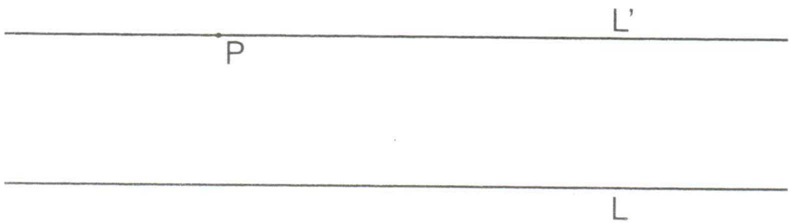

Figura 2

Uma série de discussões foi suscitada pelo V Postulado de Euclides, ao longo de dois milênios. Proclo de Alexandria (410- 485) acreditava ser esse postulado, em verdade, um teorema, que poderia ser demonstrado a partir dos outros postulados. Mas não obteve sucesso nessa tentativa.

Digno de menção é o trabalho do jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). Tomando um quadrângulo ABCD com o lado AB congruente ao lado CD e ambos perpendiculares ao lado BC, esse pesquisador demonstrou que os ângulos A e D devem ser,necessariamente, congruentes, podendo ocorrer uma, e somente uma, das três possibilidades: 1ª) Os ângulos A e D são ambos retos; 2ª) ambos são ângulos obtusos e 3ª) ambos são ângulos agudos. Saccheri verificou, ainda, que no primeiro caso, a soma dos ângulos internos de um triângulo seria igual a dois retos, no segundo caso, maior que dois retos e no terceiro caso, menor que dois retos. Considerando que as consequências das segunda e terceira possibilidades se chocam contra a intuição, opta pela primeira e conclui que o V Postulado de Euclides é verdadeiro. Contudo, o problema persistia, (figura 3)

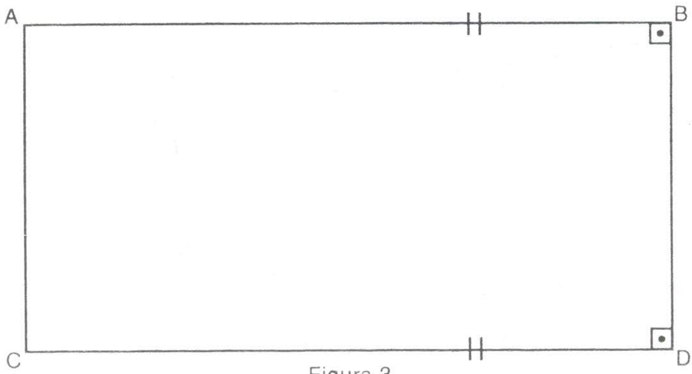

Figura 3

Johann Lambert (1728-1777), matemático suiço, também insistirá na idéia de que o V Postulado é, na realidade, um teorema, tentando demonstrá-lo, sem êxito. Nessa época, outro matemático A.M. Legendre, demonstrou que o V Postulado de Euclides é equivalente à proposição: A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos.

O problema do V Postulado de Euclides encontrará, enfim, solução no século XIX. Carl F. Gauss (1777-1855) concluiu a não demonstrabilidade do V Postulado e a possibilidade de geometria não-euclidianas, mas não publicou seus trabalhos temendo o que denominou "clamor dos beócios"[5]. A glória da fundação da primeira geometria não-euclidiana coube aos matemáticos Janos Bolyai (1802- 1860) e Nicolai I. Lobatchevski (1793-1856), húngaro o primeiro e russo o segundo.Pesquisando independentemente um do outro, ambos constroem , por volta de 1826, uma geometria em que o V Postulado de Euclides não é válido. Com a publicação do artigo "Sobre os princípios da geometria" de Lobatchevski no "Mensageiro de Kazan", em 1829, dá-se o nascimento oficial das geometrias não- euclidianas. O V Postulado de Euclides é negado, valendo em seu lugar: "Sejam dados num plano uma reta r e um ponto P que não está em r. Então, existem pelo menos duas retas paralelas a r que passam por P".

Por volta de 1829, também Janos Bolyai desenvolveu a "Ciência Absoluta do Espaço", postulando que em um plano, por um ponto P, fora de uma reta r, passam infinitas retas paralelas à reta r.

A segunda geometria não-euclidiana surge com G.F.Bernhard Riemann (1826-1866). Em 1854, Riemann proferiu sua famosa conferência "Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen". (Sobre as hipóteses que estão nos fundamentos da geometria), ao ser nomeado professor da Universidade de Göttingen. Na Geometria Elíptica de Riemann, ao invés do V Postulado de Euclides, vale o axioma: " Duas retas quaisquer de um plano têm sempre pelo menos um ponto em comum", isto é, não existem retas paralelas distintas.

Algumas conseqüências das geometrias não-euclidianas são dignas de menção, a saber:

a) Enquanto na geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, na geometria (dita hiperbólica) de Lobatchevski-Bolyai essa soma é menor que dois retos e na geometria elíptica de Riemann essa soma é maior que dois retos.

b) Enquanto na geometria euclidiana o comprimento da circunferência de raio r é C=2π r, na geometria de Lobatchevski é C= k (e r/k - e -r/k), e na geometria de Riemann C não pode ser expresso em termos simples.

Os trabalhos de Eugênio Beltrami (1835-1900), em 1868, usando geometria diferencial, vieram consolidar o surgimento das geometrias não-euclidianas.

Alguns modelos de geometrias não-euclidianas podem ser encontrados nos trabalhos de GREENBERG[6] e CASTRUCCI[7].

2. Implicações científico-filosóficas

Lobatchevski foi considerado, com razão, o "Copérnico da geometria". Boyer comenta: "Num certo sentido a descoberta da geometria não-euclidiana desferiu um golpe devastador na filosofia kantiana comparável ao efeito que teve sobre as concepções pitagóricas a descoberta dos incomensuráveis" [8].

O desenvolvimento da Física no século XX, controvérsias sobre os fundamentos da Matemática e outras questões filosóficas dos séculos XIX e XX foram suscitadas com relação às geometrias não- euclidianas.

a) Qual a geometria do espaço físico?

A Geometria Euclidiana pode parecer, de início, a única aplicável ao mundo físico de nossas experiências, enquanto as não- euclidianas seriam construções abstratas. A questão não é tão simples assim. A Geometria Euclidiana é , sem dúvida, útil na engenharia e arquitetura, contudo, para as grandes distâncias, surgem problemas. GREENBERG cita um exemplo:

Vamos interpretar uma reta fisicamente como o caminho percorrido por um raio de luz. Podemos, então, considerar três fontes de luz bem separadas, formando um triângulo. Gostaríamos de medir os ângulos desse triângulo com o objetivo de verificar se a soma dos ângulos é 180° ou não (tal experimento poderia resolver presumivelmente a questão se o espaço é euclidiano ou hiperbólico).[9]

Gauss tentou um experimento análogo, onde os vértices do triângulo eram picos de uma montanha, mas os resultados não foram conclusivos. De fato, em toda experiência física há erros. AMOROSO COSTA já observava em "As Idéias Fundamentais da Matemática" que "nenhuma medida ... permitirá jamais concluir que o espaço é realmente euclidiano". E mais:

Na verdade, os triângulos da experiência se apresentam, ora como riemannianos, ora como lobatchevskianos, com excesso ou deficiência sempre muito pequenos, mas diferentes de zero. A escolha da solução intermediária, que é a geometria euclidiana, obedece, por assim dizer, a um critério de média".[10]

A discussão pode ser aprofundada: os raios de luz não percorrem caminhos curvos? O espaço não pode ser descrito por geometrias não-euclidianas? Na teoria de Einstein, espaço e tempo são inseparáveis e a geometria do espaço-tempo é afetada pela matéria. A geometria de Riemann adequa-se melhor ao espaço finito e curvo de Einstein, que disse: "Eu considero de grande importância esta interpretação da geometria, se eu não tivesse conhecimento dela, não teria desenvolvido a teoria da relatividade".[11]

b) Questões de filosofia da matemática

O aparecimento das geometrias não-euclidianas teve como primeira consequência o fim da "verdade" absoluta da geometria de Euclides, ou, como dizem DAVIS e HERSH, do "mito de Euclides"[12].

Também a própria compreensão da natureza dos postulados ou axiomas sofre mudanças, como assinalam REALE e ANTISERI:

Com a descoberta das geometrias não euclidianas, perdeu peso a idéia de axioma verdadeiros em si mesmos, indubitáveis e auto- evidentes. Foi assim que de princípios básicos que fundamentavam todo o conjunto de teoremas, transformaram-se em começos ou pontos de partida da demonstração".[13]

A concepção dos axiomas não como "princípios verdadeiros" e sim como "pontos de partida" acarreta outras questões como`a da coerência (não-contradição) e da completeza (seriam todas as afirmações verdadeiras demonstráveis a partir do sistema de axiomas adotado?)

Outras questões também podem ser postas, por exemplo: De que trata a matemática?

Tentativas de respostas a questões como estas fizeram surgir, nos inícios de nosso século, as correntes: a) Logicista, de Gottlob Frege (1848-1925) e Bertrand Russell (1872-1970); b) Construtivista, de L.E.J. Brower (1881-1966) e c) Formalista, cujo criador e maior expoente foi David Hilbert (1862-1943). A natureza deste trabalho não permite um aprofundamento maior na discussão dessa problemática.

Considerações finais

Além das implicações de natureza científico-filosóficas mencionadas, pode-se dizer que problemas gerais de filosofia foram afetados com as geometrias não-euclidianas.

DAVIS e HERSH, referem-se ao "mito de Euclides", como afirmam:

É a crença de que os livros de Euclides contêm verdades sobre o universo claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes por si próprias ... chega a conhecimento certo, objetivo e eterno.[14]

Até o advento das geometrias não-euclidianas esse mito imperou. De Platão a Kant e Hegel, passando por Descartes e Leibniz, a matemática exerceu papel importante na filosofia, como exemplo de conhecimento verdadeiro e indubitável. Immanuel Kant (1724- 1804) cita proposições da geometria euclidiana, como algo indubitável nos seus "juízos sintéticos a priori".

Se alguns exageram o "desastre" do século XIX, como DAVIS e HERSH, para quem "A perda da certeza na geometria foi filosoficamente intolerável, pois implicou na perda de toda a certeza no conhecimento humano",[15] outros, mais moderados , como J.M.Bochenski, mostram que se apresentam sérias dificuldades no conceito de verdade absoluta: " ... quando hoje se pergunta a um geômetra se determinado princípio é verdadeiro ou falso, ele por sua vez pergunta: Em que sistema? ... vê-se que sua verdade depende do sistema que se adota".[16] A revolução copernicana de Lobatchevski-Bolyai-Riemann não foi menos importante que a de Kant!

ABSTRACT

This work, after a historical gathering on Euclides' V Postulate and the birth of Lobatchevski's and Riemann's Non-Euclidean Geometries in the XIX century, brings some comments about the philosophical questions raised by these geometries.

NOTAS E REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - EINSTEIN, Albert. Como Vejo o Mundo. Rio de Janeiro : Nova

2 - Fronteira. 1981. p.147.

3 - ENRIQUES, Federico. Los Elementos de Euclides y la Critica Antigua e Moderna. Madrid : Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1954. p.39.

3 - IDEM, p.37.

4 - DAVIS, P.J.; HERSH, Reuben. A Experiência Matemática. Rio de Janeiro : Francisco Alves, 1985. p. 252.

5 - Esta expressão consta de uma carta de Gauss e Bessel em 1829, Werke, v.8, p.200, Göttingen, 1900.

6 - GREENBERG, Marvin Jay. Euclidean and non-euclidean geometries. San Francisco : W.H. Freeman, 1973.

7 - CASTRUCI, Benedito. Fundamentos da Geometria. Rio de Janeiro : Livros Técnicos, 1978.

8 - BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo : Edgard Blücher, 1974. p.396.

9 - GREENBERG, Marvin Jay, op. cit. p. 248.

10 - AMOROSO COSTA, M. As idéias Fundamentais da Matemática e outros Ensaios. São Paulo : Grijalbo. 1971. p.313.

11 - GREENBERG,M.J. op.cit. p.249.

12 - DAVIS, P.J.; HERSH, R. op. cit. p.366

13 - REALE, Giovanni; ANTISERI, Dario. História da Filosofia. São Paulo : Paulinas, 1991. p.367

14 - DAVIS, P. J.; HERSH, R. op. cit. p.366

15 - IDEM, P. 372

16 - BOCHENSKI, J.M. Diretrizes do Pensamento Filosófico. São Paulo : EPU, 1977. p.46.