



## LOGICISMO, FORMALISMO E CONSTRUTIVISMO

\* Carlos Jeremias Klein

### RESUMO:

Este trabalho enfoca as três principais correntes da Filosofia da Matemática surgidas nos séculos XIX e XX: a **logicista**, pretendendo reduzir a Matemática à Lógica; a **formalista**, segundo a qual os teoremas são deduzidos dos axiomas segundo leis lógicas, embora os axiomas não sejam, necessariamente, princípios lógicos; e a **construtivista**, na qual não vale, por exemplo, o 'princípio do terceiro excluído' da lógica clássica.

### ABSTRACT

This study focuses on the three principal trends of Mathematical Philosophy in the XIX and XX centuries: the logicist, which aims at the reduction of mathematics to logic; the formalist, according to which the theorems are deduced from the axioms according to logic laws, although the axioms are not, necessarily, logic principles; and the constructivist, in which, for example, "the principle of the third excluded", of the classic logic, is not valid.

**Unitermos:** logicismo, formalismo, construtivismo.

**Keywords:** logicism, formalism, constructivism.

### INTRODUÇÃO

O desenvolvimento, não apenas das ciências naturais e humanas, mas também das ciências formais, nos séculos XIX e XX, levou um grupo de lógicos e matemáticos à "pesquisa sobre os fundamentos"<sup>1</sup> da Matemática.

Na primeira metade do século XIX, com Carl F. Gauss, Janos Bolyai, N. Lobatchevski e Bernhard Riemann, surgem as *geometrias não-euclidianas*. Na segunda metade aparecem as contribuições de Gottlob Frege e Bertrand Russell na definição de "número", de Giuseppe Peano na construção do conjunto dos números naturais a partir de cinco axiomas, bem como a reformulação axiomática da geometria euclidiana por David Hilbert.

A pesquisa sobre os fundamentos fez surgir, na Filosofia da Matemática, três correntes principais: o logicismo ou platonismo, o formalismo e o construtivismo ou intuicionismo.

---

\* Docente do Departamento de Ciências Exatas - CESULON, Mestre em Matemática e Especialista em Filosofia.

<sup>1</sup> Ver REALE, G.; ANTISERI, D. **História da Filosofia**, vol. III. São Paulo, Edições Paulinas, 1991, p. 965.

## 1. Logicismo ou Platonismo

Alguns nomes célebres ligados a essa corrente são Gottlob Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947). Os dois últimos publicaram, entre 1910 e 1913, em três alentados volumes, a célebre obra *Principia Mathematica*.

Os logicistas consideram a Matemática parte da Lógica. Assim, segundo Russell "toda Matemática pura trata exclusivamente de conceitos definíveis em termos de um número muito reduzido de conceitos lógicos fundamentais e, todas as suas proposições, são redutíveis a um número muito pequeno de princípios lógicos".<sup>2</sup> A proposta dos logicistas se consolidaria se se mostrasse que 'todas as afirmações da Matemática fossem proposições lógicas'.

Alguns problemas, contudo, surgem. O chamado "princípio do terceiro excluído", da lógica clássica, tem o seguinte enunciado: Uma proposição é verdadeira ou é falsa, excluindo-se qualquer outro valor lógico. Afirmações do tipo "os indivíduos pertencentes à classe X têm o predicado Y" não criam maiores complicações. Tal não é o caso, porém, de proposições da forma "Os predicados X têm o predicado Y". Um exemplo clássico é o chamado *Paradoxo de Russell*: Seja A o conjunto de todos os conjuntos tais que o próprio A não figura entre seus elementos. Pede-se, agora: A pertence a A? Tanto a resposta afirmativa quanto a negativa levam a paradoxos.<sup>3</sup> Eis uma versão popular deste paradoxo, do próprio autor: "definamos um barbeiro de aldeia como aquele que faz a barba de todos aqueles que não se barbeiam sozinhos"<sup>4</sup> Qualquer resposta à pergunta: "Quem barbeia o barbeiro?" é contraditória.

Bertrand Russell propôs uma saída para evitar problemas como o de seu paradoxo mencionado, a saber, a *Teoria dos Tipos*: há uma hierarquia de entes na teoria dos conjuntos, a *pertinência*, que relaciona entes do tipo n com entes do tipo n + 1. A eliminação do paradoxo, contudo, fez-se à custa de novo axioma, restritivo, que parece deixar inacabada a proposta de logicização da Matemática.

A posição filosófica dos logicistas pode ser denominada 'platonista', ou seja, postula a existência real dos 'entes' matemáticos: "A Aritmética precisa ser descoberta exatamente no mesmo sentido em que Colombo descobriu as Índias Ocidentais, e não criamos números, assim como ele não criou os índios... Tudo o que puder ser imaginado existe, e o ser é anterior e não o resultado do fato de ter sido pensado".<sup>5</sup>

## 2. O formalismo de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) é o expoente da escola formalista. Os formalistas não propõem reduzir a Matemática à Lógica. Os teoremas são demonstrados a partir dos

---

<sup>2</sup> Apud KÖRNER, S. **Introduction a la Filosofia a la Matemática**. Mexico, Siglo Veinteuno, 1974, p. 42.

<sup>3</sup> Esse paradoxo lógico lembra o antigo "paradoxo do mentiroso": "Epimênides, o cretense, diz que todos os cretenses são mentirosos" (REALE e ANTISERI, op. cit., p. 967), citado também na Bíblia, com exceção do nome (Tito 1,12).

<sup>4</sup> REALE, G.; ANTISERI, D., op. cit., p. 967.

<sup>5</sup> Apud BARKER, S. F., **Filosofia da Matemática**. Zahar, Rio, 1976.



axiomas, ou de outros teoremas, segundo leis da Lógica, mas os axiomas não são princípios lógicos. O papel desempenhado pela Lógica na Matemática é o mesmo que nas demais ciências.

Na corrente formalista não faz sentido perguntar pela veracidade das afirmações matemáticas. Trata-se, na verdade, de um jogo, seguindo regras combinadas pelos participantes (os axiomas). A existência de um ente matemático é admitida desde que o mesmo seja definido de modo não contraditório.<sup>6</sup>

Segundo Machado<sup>7</sup>, os fundamentos de Hilbert, influenciados pela filosofia de Kant, são: (a) A Matemática compreende descrições de objetos e construções extra-lógicas; (b) estas construções e estes objetos devem ser enlaçados em teorias formais em que a lógica é instrumento fundamental; c) o trabalho do matemático deve consistir no estabelecimento de teorias formais, que sejam consistentes, bem como cada vez mais abrangentes, até que se chegue à completa formalização da Matemática.

A proposta formalista, no que tange ao item (c), não se manteve. Kurt Gödel (1906-1978), em seu trabalho *Proposições Formalmente Indecidíveis dos "Princípios Mathematica" e de Sistemas Afins*, de 1931, demonstrou que:

*não é possível construir uma teoria axiomática dos números que goze do caráter completo pretendido por Hilbert... Gödel extraiu o corolário: um cálculo lógico, com potência suficiente para formalizar a Aritmética elementar, se for coerente, é tal que, é indemonstrável a fórmula que expressa a sua coerência. Assim, não se pode obter a coerência da Aritmética usando os instrumentos pertencentes ao sistema formal com que se expressa a Aritmética.*<sup>8</sup>

### 3. O construtivismo ou intuicionismo

O matemático holandês L. E. J. Brouwer (1881-1966) pode ser considerado o maior representante do construtivismo. Contrariamente aos logicistas, que admitem a existência dos "entes" da Matemática Clássica, os construtivistas somente aceitam a daqueles que tiverem sido elaborados ou construídos pela mente humana. Rejeitam que a Matemática possa ser reduzida à Lógica, como querem os logicistas, bem como a proposta formalista de que se trata de 'regras de jogo'.

Os paradoxos surgidos, por exemplo, na teoria dos conjuntos, ao invés de simples falhas passíveis de correção, indicavam, segundo os construtivistas, que a Matemática deve ser reconstruída a partir dos "fundamentos", dos números naturais 1, 2, 3, ... dos quais o ser humano tem uma 'intuição primordial'.

Desvinculando a Matemática da Lógica, os construtivistas rejeitam o "princípio do terceiro excluído", fundamental na lógica clássica. Admitem a construção de enunciados significativos, aos quais não podem ser atribuídos um dos dois valores lógicos: verdade ou falsidade. Brouwer deu um exemplo de um número real para o qual é impossível demonstrar construtivamente se é zero, positivo ou negativo.<sup>9</sup>

<sup>6</sup> Ver REALE, G.; ANTISERI, D., op. cit., p. 969.

<sup>7</sup> MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade**. Cortez., São Paulo, 1987.

<sup>8</sup> REALE, G.; ANTISERI, D. op. cit., p. 971.

<sup>9</sup> Cf. DAVIS & HERSH. **A Experiência Matemática**, Rio, Ed. Francisco Alves, 1985, p. 412.

A adoção do construtivismo empobreceria grandemente a Matemática. Por exemplo, não se poderia usar a 'demonstração por redução ao absurdo', e belos teoremas da Matemática Clássica desapareceriam. Provavelmente, isto explique a rejeição dessa corrente pela grande maioria dos matemáticos.

### *Considerações finais*

Em interessante artigo *As três crises da Matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo*, Snapper relaciona as três correntes do século XX às três escolas filosóficas da Idade Média: realismo ou platonismo, nominalismo e conceptualismo. O logicismo propõe, como o realismo, a "realidade" dos entes matemáticos. O formalismo, ao considerar os enunciados matemáticos "regras de jogo" aproxima-se dos nominalistas, para os quais os conceitos 'universais' não existem senão como 'nomes'. Os intuicionistas ou construtivistas, que aceitam somente as 'entidades' criadas pela mente humana, por seu turno, lembram os conceptualistas.

Davis e Hersh, na interessante obra *A Experiência Matemática*, citando Monk, apresentam alguns dados estatísticos: "o mundo matemático é habitado por 65% de platonistas (logicistas), 30% de formalistas e 5% de construtivistas"<sup>10</sup> e concluem com uma bem-humorada observação: "o matemático típico é um platonista secreto com uma máscara formalista que ele põe quando a ocasião pede. Os construtivistas são uma espécie rara, cujo *status* no mundo matemático parece, por vezes, o de hereges tolerados, cercados dos membros ortodoxos de uma igreja".<sup>11</sup>

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro, Zahar, 1976.
- DAVIS, P. H.; HERSH, R., *A Experiência Matemática*. Rio, Francisco Alves, 1985.
- KÖRNER, S. *Introduction a la Filosofia de la Matemática*. Mexico, Siglo Veintiuno, 1974.
- MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade*. São Paulo, Cortez, 1987.
- REALE, G.; ANTISERI, D. *História da Filosofia*. São Paulo, Paulinas, 1993.
- RUSSELL, B. *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro, Zahar, 1963.
- SNAPPER, E. As Três Crises da Matemática: o Logicismo, o Intuicionismo e o Logicismo. *In Mathematics Magazine*, vol. 52 (4), 1979, (trad. para o português por João Pitombeira de Carvalho, *in* Humanidades, Brasília).

---

<sup>10</sup> Apud DAVIS & HERSH, op. cit.

<sup>11</sup> DAVIS & HERSH, op. cit.